

# Formación de profesorado: Conceptualización del uso del software Geogebra en la enseñanza de la matemática en educación media como parte de la didáctica de la disciplina

**Monika Dockendorff, Horacio Solar Bezmalinovic**

Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile  
mdockend@uc.cl, hsolar@uc.cl

## Resumen

El *Programa de Formación Pedagógica* de la Pontificia Universidad Católica de Chile, forma como docentes a licenciados en matemática y áreas afines en un período de un año. En el contexto del proyecto PUC1201 de innovación en la formación de profesores, los cursos de Didáctica de la Matemática I y II contemplan actualmente una línea TIC. El propósito de este trabajo es caracterizar el sentido que ha ido adquiriendo la incorporación de los recursos informáticos a la enseñanza de la Matemática y la evolución en la conceptualización del uso de estas herramientas tecnológicas que han exhibido los futuros profesores durante su proceso formativo. Se busca describir en particular el proceso de reconocimiento del software GeoGebra como un medio que favorece el desarrollo del ejercicio profesional del futuro docente y como un recurso que permite mejorar los aprendizajes de los estudiantes. La metodología aplicada considera tres etapas: (1) Exploración y uso de las aplicaciones del software por parte de los alumnos en

formación. (2) Diseño e implementación de tareas matemáticas utilizando GeoGebra en su práctica profesional. (3) Reflexión sobre el aprendizaje de las matemáticas mediante herramientas tecnológicas. Estas etapas se presentan por medio de un estudio de caso de uno de los profesores en formación.

## Introducción

El *Programa de Formación Pedagógica* de la Pontificia Universidad Católica de Chile, forma como docentes a licenciados en un período de un año. El proyecto PUC1201 se propone como objetivo una renovación curricular profunda de dicho programa de formación de profesores, por medio de la incorporación sistemática de las TIC, con foco en las cuatro asignaturas centrales del currículo escolar: Lenguaje, Matemática, Ciencias Naturales y Ciencias Sociales. Para la formación específica de profesores de matemática se contempla una línea de dos cursos de Didáctica de la matemática durante todo el año de formación, y a partir del primer semestre del 2014 se contempló una formación en TIC para los futuros profesores utilizando como recurso el software GeoGebra.

Algunos investigadores han abordado el uso de

GeoGebra mediante experiencias de ampliación que permiten a los alumnos explorar, conjeturar y finalmente validar o justificar sus hipótesis. En este contexto el software favorece la detección de propiedades que se descubren mediante su visualización, facilitando el planteamiento de conjeturas. Así, GeoGebra contribuye a identificar ciertas propiedades que se cumplen de manera general y aquellas que no, convirtiéndose en un potente instrumento de comprobación o de desestimación de conjeturas (Morera, 2011).

Varias investigaciones buscan establecer una tipología de alumnos para categorizar y analizar el comportamiento de los estudiantes de acuerdo al uso que le dan a la herramienta. Se observa que los alumnos tienen pocas dificultades en relación al uso de esta herramienta y coinciden en que ayuda a visualizar el problema y a evitar obstáculos algebraicos. En general, el uso de GeoGebra promueve un pensamiento más geométrico y facilita un soporte visual, algebraico y conceptual a la mayoría de alumnos, aunque con presencia de variedad de estrategias de resolución, las cuales pueden ser interpretadas en términos de tipologías de alumnos.

La incorporación de ambientes de geometría dinámica, en particular GeoGebra, en la formación inicial de profesores de matemática favorece la construcción de conocimientos matemáticos significativos, operativos y estructurados, lo que le permite a los futuros docentes movilizarse fácilmente entre los sistemas de representación simbólicos, numéricos, gráficos y analíticos (Carranza, 2011). El software se presta para ser utilizado en la formación de profesores mediante tareas docentes que posteriormente servirán de modelos de actuación para la práctica docente, propiciando esta labor en condiciones similares a las que fue aprendida y apropiada (González, 2014). Gómez-Chacón & Joglar (2010) plantean

que cuando los futuros profesores utilizan la tecnología para resolver problemas matemáticos, éstos no desarrollan espontáneamente un método para integrar estas herramientas en su futura práctica docente. En consecuencia, proponen abordar la integración de la tecnología al aula de matemática desde una perspectiva integral, tomando en cuenta sus distintas componentes: cognitiva, didáctica, técnica y afectiva. El nivel de confianza, motivación y experticia en el manejo de las herramientas tecnológicas es otro aspecto central en el éxito de su incorporación futura en el contexto escolar, lo que revela la necesidad de integrar el uso de GeoGebra en la fase inicial de la formación docente. El componente afectivo, contempla el desarrollo de una identidad profesional como docente de matemática que involucra un proceso biográfico donde se establece una conexión personal con la tecnología y el desarrollo del rol del profesor en relación a la misma. Los futuros profesores señalan que su visión respecto de cómo se desarrolla el aprendizaje en la escuela cambia, enfatizando un aprendizaje desde el descubrimiento en contraposición a una enseñanza transmisible, en una transacción entre identidades heredadas y concebidas en este nuevo escenario.

Sobre la base de estos antecedentes, nos surgen dos preguntas ¿Qué tipo de aprendizajes matemáticos promueve GeoGebra? ¿Cómo impacta el uso de GeoGebra en la preparación de la enseñanza en la reflexión de profesor? Estas preguntas se materializan en el objetivo del estudio: Caracterizar el sentido que ha ido adquiriendo la incorporación de los recursos informáticos a la enseñanza de la Matemática y la evolución en la conceptualización del uso de estas herramientas tecnológicas que han exhibido los futuros profesores durante su proceso formativo.

## Metodología

El contexto de estudio es el curso de Didáctica de la Matemática I y II y las experiencias de prácticas en los establecimientos educacionales que tienen los estudiantes que están cursando el plan de formación pedagógica de la PUC para ser profesores de Matemática en Enseñanza Media. En el curso de Didáctica I del primer semestre, los estudiantes tuvieron la oportunidad de desarrollar guías en el entorno GeoGebra, que estaban enfocadas a diferentes unidades de matemática desde 1° a 4° medio (14-18 años). Al finalizar cada una de las guías se les pidió que hicieran una valoración del instrumento. Esta experiencia les permitió manipular GeoGebra y conocer diferentes paquetes de herramientas. Posteriormente, los estudiantes diseñaron un applet para ser aplicado en el contexto de la práctica. Finalmente, los estudiantes elaboraron una reflexión sobre la aplicación del applet.

Como diseño metodológico se ha optado por un estudio de caso porque dicho enfoque permite desarrollar las preguntas de investigación. Se ha seleccionado al estudiante en práctica Simón para el estudio de caso porque reúne una serie de características propicias para indagar en los focos de estudio: fue un estudiante destacado de la licenciatura en matemáticas y tiene conocimiento de otros softwares matemáticos, lo que le permitió un rápido aprendizaje de GeoGebra. Además, exhibe un conocimiento matemático profundo en el desarrollo de las guías y un nivel de reflexión alto en los comentarios. Estas características se reafirman en el diseño del applet cuya construcción reúne una serie de elementos que se describen en el análisis de los datos.

El proceso de recolección de datos se ha organizado sobre la base de las dos dimensiones de la investigación: enseñanza y reflexión. Estas dos dimensiones, asociadas a las dos preguntas de la investigación, sirven de fundamento para volver operativo el objetivo de investigación.

Para la dimensión enseñanza se ha considerado como dato el applet diseñado por Simón, mientras que para la dimensión reflexión los datos consisten en las valoraciones de las guías realizadas por Simón, y su reflexión sobre la aplicación de applet.

## Análisis de los datos.

Elementos incorporados en la *enseñanza de las matemáticas mediante TIC*: El siguiente análisis está enfocado en la dimensión de la enseñanza, y busca describir en detalle las características -principalmente dinámicas- del applet diseñado por Simón, y el modo en que éstas favorecen el desencadenamiento de ciertos procesos matemáticos al introducirse en la secuencia didáctica. La construcción y el diseño elegidos buscan ir fundando la comprensión de los teoremas de Euclides secuencialmente (Pasos 1 a 7) hasta llegar a explicitar el contenido (Figura 1).

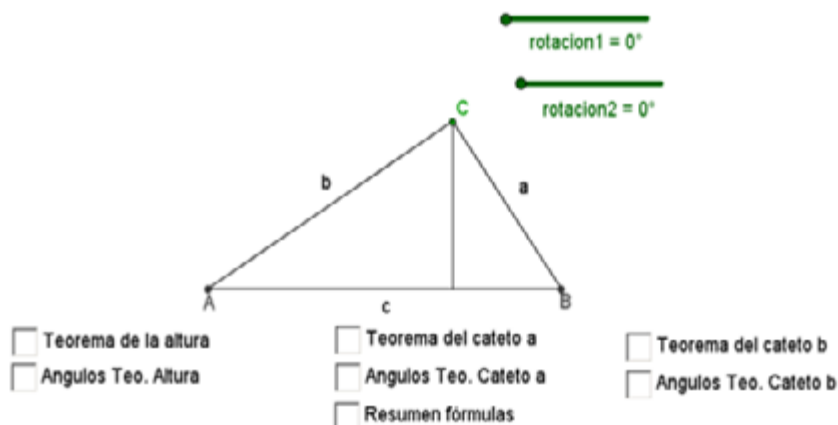
El applet analizado corresponde a una representación de un triángulo rectángulo ABC al que se le traza la altura relativa a la hipotenusa, conformando dos triángulos menores (Paso1). Mediante el uso de *casillas de control* que permiten mostrar/ocultar objetos, se destacan los ángulos interiores del triángulo ABC de color

rojo y azul para los ángulos agudos y verde para el ángulo recto. Del mismo modo quedan

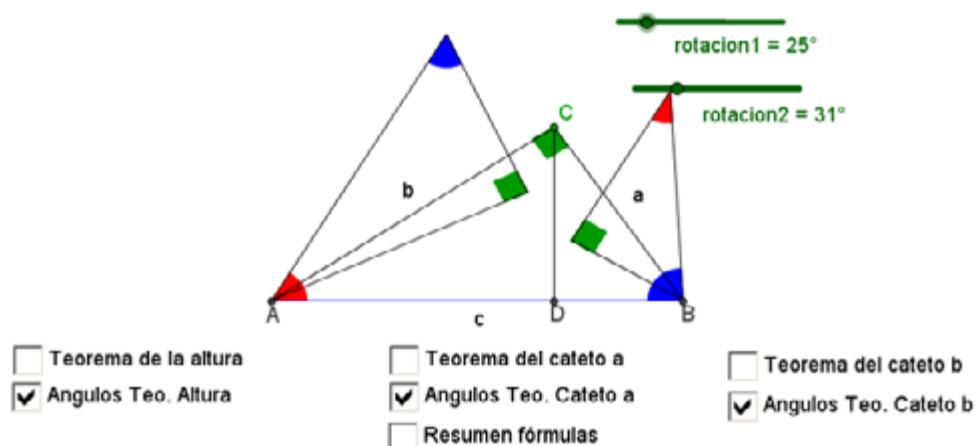
resaltados los ángulos de los dos triángulos menores.

## Teorema de Euclides

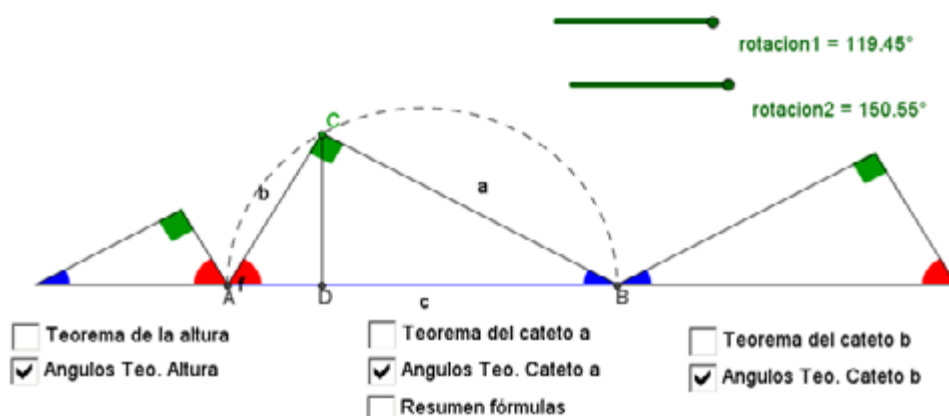
Paso 1



Paso 2



Paso 3

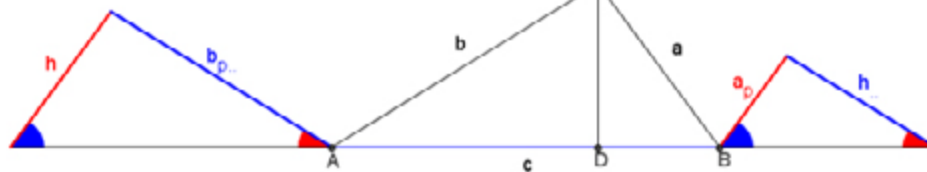


# Teorema de Euclides

Paso 4

$$\frac{h}{a_p} = \frac{b_p}{h}$$

$$h^2 = a_p \cdot b_p$$



rotacion1 = 145.92°

rotacion2 = 124.08°

- ☒ Teorema de la altura  
☒ Angulos Teo. Altura

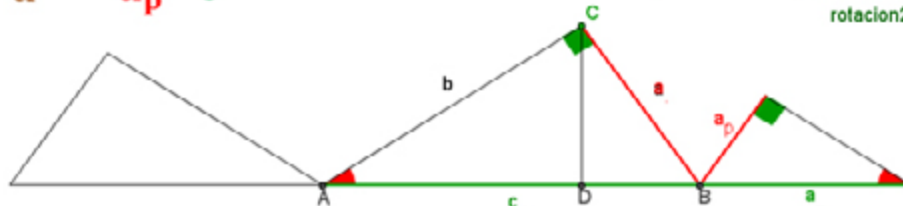
- ☐ Teorema del cateto a  
☐ Angulos Teo. Cateto a  
☐ Resumen fórmulas

- ☐ Teorema del cateto b  
☐ Angulos Teo. Cateto b

Paso 5

$$\frac{a_p}{a} = \frac{a}{c}$$

$$a^2 = a_p \cdot c$$



rotacion1 = 145.92°

rotacion2 = 124.08°

- ☐ Teorema de la altura  
☐ Angulos Teo. Altura

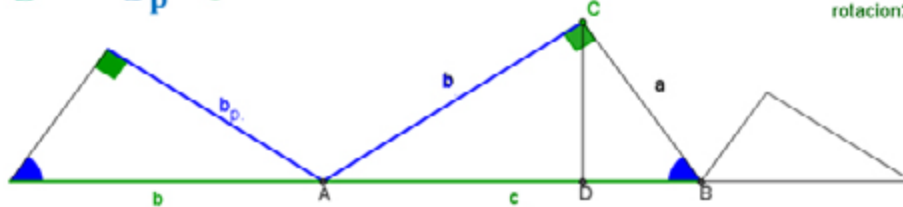
- ☒ Teorema del cateto a  
☒ Angulos Teo. Cateto a  
☐ Resumen fórmulas

- ☐ Teorema del cateto b  
☐ Angulos Teo. Cateto b

Paso 6

$$\frac{b}{c} = \frac{b_p}{b}$$

$$b^2 = b_p \cdot c$$



rotacion1 = 145.92°

rotacion2 = 124.08°

- ☐ Teorema de la altura  
☐ Angulos Teo. Altura

- ☐ Teorema del cateto a  
☐ Angulos Teo. Cateto a  
☐ Resumen fórmulas

- ☒ Teorema del cateto b  
☒ Angulos Teo. Cateto b

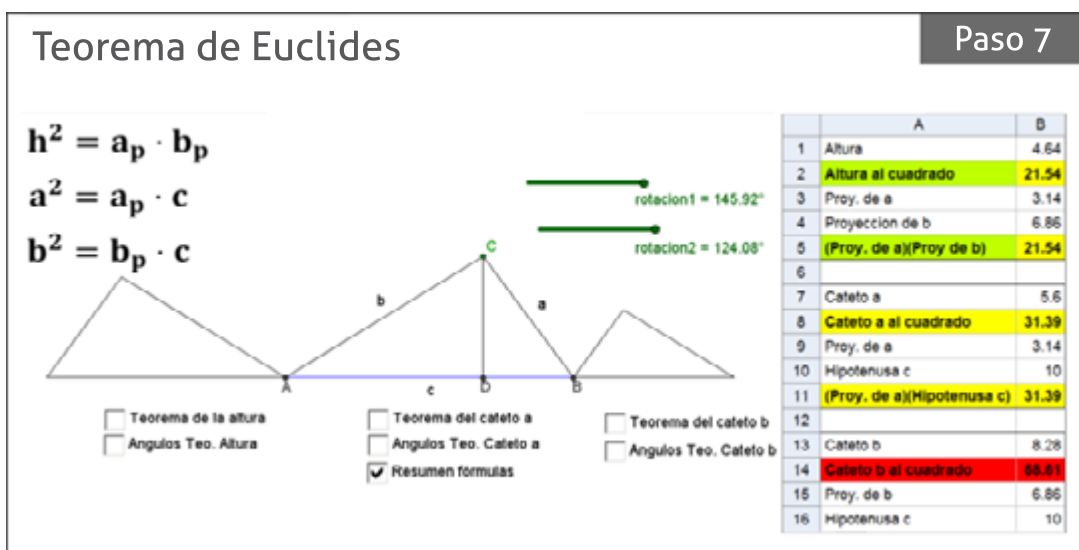


Figura 1: Secuencia del applet con GeoGebra.

Mediante *deslizadores*, se rotan los triángulos menores en torno a los vértices A y B respectivamente, quedando estos dispuestos horizontalmente junto al original ABC (Paso 2). Como los ángulos de los tres triángulos aparecen destacados, los alumnos conjeturan sobre su condición de semejanza, basados en el criterio AA visto en la subunidad anterior. El vértice C, que por construcción corresponde a un *punto sobre una cónica* (semicircunferencia), se desplaza sobre ésta permitiendo *generalizar* que los triángulos conformados a partir del trazo de la altura relativa a la hipotenusa, son semejantes para *cualquier* triángulo rectángulo (Paso 3). Nuevamente con el uso de *casillas de control*, se destacan esta vez los lados homólogos de los triángulos menores. Los alumnos conocen la condición de proporcionalidad que presentan los lados correspondientes de figuras semejantes, lo que les permite deducir el teorema de la altura a partir de su división (Paso 4). Análogamente, los Pasos 5 y 6 de la Figura 1 muestran el uso de *casillas de control* que destacan los lados homólogos de los triángulos que orientan la

deducción de los teoremas del cateto a y del cateto b respectivamente. Cabe señalar que las casillas fueron construidas individualmente, lo que permite destacar primero los lados homólogos y luego mostrar la división de éstos y el teorema correspondiente, lo que da tiempo y oportunidad a los alumnos para plantear la proporcionalidad, realizar la operatoria y llegar al teorema, antes de que se explicita en el applet a modo de comprobación. Para finalizar se incorpora la vista *Hoja de Cálculo* donde se han registrado las magnitudes de los lados, proyecciones y altura, así como los productos implicados en los teoremas. Se *comprueba* numéricamente que las secuencias de valores verifican las igualdades de los teoremas al modificarse las magnitudes, producto del *desplazamiento* del vértice C por la cónica (Paso 7).

Como ha quedado de manifiesto en el análisis precedente, el applet construido sobre la base de diferentes elementos dinámicos e interactivos, a saber: deslizadores, punto en objeto, casillas de control y hoja de cálculo; los cuales favorecen

la activación de ciertos procesos matemáticos como la conjetura, la deducción y comprobación. El desarrollo de estos procesos aparece facilitado por la visualización, competencia básica e inmediata, que permite una mejor comprensión, acceso y obtención de resultados correctos a una mayor proporción de alumnos. El aprendizaje ya no queda restringido a los alumnos capaces de comunicar ideas y conceptos algebraicamente, sino que se extiende a aquellos menos hábiles en el lenguaje abstracto, que apoyados en este

nuevo soporte visual son capaces de adquirir conocimiento.

En la tabla 1 se han sistematizado las características dinámicas del applet de la figura 1 y los procesos asociados. El conjunto de estos procesos conforma lo que podemos llamar la competencia de visualización.

*Tabla 1:* Relación entre las características dinámicas y los procesos de la visualización

Dinámico	Procesos	Procesos
Deslizador (interactivo)	Conjetura	Visualizar
Punto en objeto (se desplaza por su contorno)	Conjetura	
Casilla de control (objeto de acción)	Deducción	
Hoja de cálculo (registro de secuencia de valores)	Comprobación	

*Reflexiones del estudiante y su concepción de la enseñanza de la matemática con TIC:* Se han analizado las reflexiones de Simón respecto a diferentes experiencias que ha tenido con GeoGebra, que se han concretado en dos instancias: como usuario de guías desarrolladas en el entorno GeoGebra y su experiencia como docente enseñando contenidos por medio de un applet construido con GeoGebra.

En los comentarios de las guías de Simón, se destaca la utilidad del GeoGebra para el aprendizaje de ciertos conceptos matemáticos; en particular es capaz de reconocer el desarrollo de la competencia de visualización en una de las guías. Simón vincula la visualización con un cambio de mirada, "de análisis algebraico a un análisis geométrico del problema", reconociendo así una de las características clave de esta competencia.

En la experiencia de enseñanza con el applet, Simón describe la importancia que tuvo el utilizarlo articulado con otros elementos en la secuencia de aprendizaje: Si bien Simón asocia el applet con la generación de las relaciones entre las razones, algunos de los procesos de la visualización se vienen trabajando desde el uso del material concreto, tales como la conjetura, para luego reconstruir el teorema de Euclides por medio del applet, lo cual refleja la secuencia de procesos que emergen en el desarrollo de la actividad.

## Conclusiones

Durante el proceso de formación pedagógica, los futuros profesores se fueron familiarizando



y apropiando de las herramientas del software dinámico GeoGebra, lo que les permitió redescubrir los contenidos matemáticos escolares a través de la tecnología. Simón fue gradualmente caracterizando y asociando las aplicaciones curriculares abordadas con el software a la competencia de la visualización, como el mayor beneficio que otorga el uso de TICs en la enseñanza de la matemática escolar. El sentido que ha ido adquiriendo la incorporación de herramientas tecnológicas en su rol del profesor ha quedado plasmado en el diseño y construcción del applet analizado. La incorporación de elementos dinámicos y el uso interactivo del color, aprovechan plenamente el nuevo soporte visual que permite a una mayor cantidad de alumnos desarrollar los procesos matemáticos necesarios para lograr los aprendizajes esperados. Si bien este análisis se circunscribe a un primer acercamiento del futuro profesor a la incorporación de TICs al aula de matemática, actualmente estamos en proceso de recolección de más datos de su práctica profesional, que esperamos permitan analizar la incorporación de nuevas formas de aproximar a los alumnos a la tecnología y reflejen la manera en que se desarrollan las competencias matemáticas docentes que median las interacciones entre la tecnología y el conocimiento matemático de forma cada vez más fluida.

## Referencias

Carranza, M. (2011). *Exploración del impacto producido por la integración del ambiente de geometría dinámica (AGD) GeoGebra en la enseñanza de los cursos de matemáticas básicas de primer semestre de la Universidad Nacional de Colombia Sede*

*Palmira. Maestría Thesis, Universidad Nacional de Colombia, Sede Palmira.*

Costa, J. (2011). *Plataforma de matematización en un entorno GeoGebra dentro de un planteamiento didáctico «desde abajo hacia arriba».* *Enseñanza de las Ciencias*, 29 (1), 101-114.

Gavilán, J.; Escudero, I.; Barroso, R. & Sánchez-Matamoros, G. (2011). *Una innovación en matemáticas específicas para maestros, apoyada en software dinámico. Comunicación en Jornada. 1ª Jornadas de Innovación Docente. Universidad de Sevilla.*

González, J. (2014). *Formación de profesores en geometría con GeoGebra.* *Revista Iberoamericana de Educación*. 2014, 161-172.

Gómez-Chacón, M. & Joglar, N. (2010). *Developing competencies to teach exponential and logarithmic functions using GeoGebra from a holistic approach.* *Educ. Matem. Pesq.*, 12 (3), 485-513.

Hohenwarter, M. & Jones, K. (2007). *Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics.* University of Northampton, UK: BSRLM, 27 (3).

Iranzo, N. & Fortuny, J. (2009). *La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado.* *Enseñanza de las Ciencias*, 27 (3), 433-446.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). *Technological Pedagogical Content Knowledge: A new framework for teacher knowledge.* *Teachers College Record*. 108 (6), 1017-1054.

Morera, L. (2011). *Uso del GeoGebra en el aprendizaje de las transformaciones.* *Uno*, 56, 95-103.